بنام خدا

فصل ۵ : خازن

Subject

خازن به معنای محل ذخیره کردن است و خازن الکتریکی، وسیله‌ای برای ذخیره کردن بار الکتریکی است.

هر رسانا می‌تواند یک خازن الکتریکی باشد. عموماً برای سادگی در کاربرد، از دو رسانا که بین آنها عایق است به عنوان خازن استفاده می‌شود. یکی از رسانا‌ها بار $q+$ و دیگری $q-$ را روی خود جای می‌دهند. چون بار روی سطح خارجی رسانا توزیع می‌شود، حجم رسانا اهمیت نداشته و رویه یا سطح آن اهمیت دارد.

وجود بار، سبب ایجاد میدان E بین دو رسانا و اختلاف پتانسیل ΔV می‌شود. با افزایش بار q، میدان E و ولتاژ ΔV نیز افزایش می‌یابد.

ظرفیت C : هر خازن می‌تواند مقدار مشخصی بار را ذخیره کند. تعریف می‌کنیم: ظرفیت یک خازن یعنی مقدار باری که به ازای اختلاف پتانسیل یک ولت می‌توان روی صفحات خازن ذخیره کرد.

$$C = \frac{q}{\Delta V} \longrightarrow C = \frac{q}{V}$$

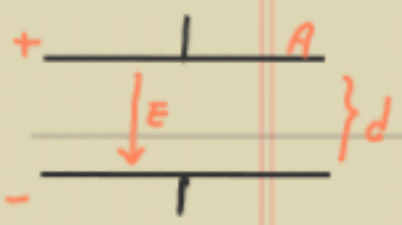
واحد ظرفیت کولن بر ولت است که به آن فاراد F گفته می‌شود.

1F ظرفیت بزرگی است و معمولاً در کاربردها از ظرفیت‌های خیلی کمتر MF ، nF ، pF استفاده می‌شود.

ظرفیت تابع q و V نیست بلکه تابع شکل هندسی و ابعاد و جنس عایق میان صفحات خازن است و برای یک خازن مشخص، ظرفیت مقدار ثابتی است و معمولاً رابطه به شکل $q = CV$ بیان می‌شود یعنی بار و ولتاژ با هم رابطه مستقیم دارند. (هر محفظه‌ای که رابطه q و V بین دو سر آن یک رابطه خطی باشد، خازن است).

محاسبه ظرفیت : برای اشکال هندسی ساده‌ای که میدان الکتریکی آنها را از قانون گاوس می‌دانیم محاسبه کردیم.

الف) خازن مسطح : دو صفحه رسانای سطح موازی با مساحت A (متقابل هم) و فاصله d با عایق خلاء :



$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{q}{\frac{q}{A\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

مشاهده می‌شود که ظرفیت خازن سطح با ثابت صفحات رابطه مستقیم، با فاصله صفحات رابطه عکس و با گذردهی عایق (خلاء) رابطه مستقیم دارد.

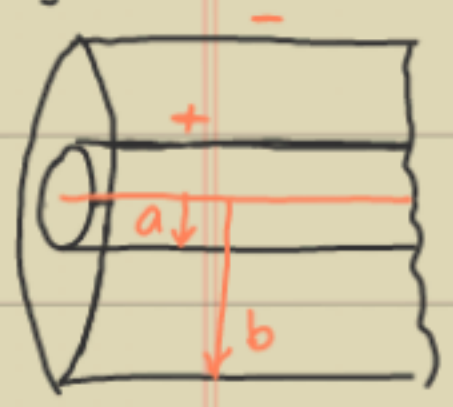
ب) خازن کروی: دو پوسته کروی رسانای هم مرکز به شعاع‌های b, a ($b>a$) با عایق خلاء.

$$C=\frac{q}{V}=\frac{q}{-\int_b^a E\,dr}=\frac{q}{-\int_b^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r}\right)_b^a}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

$$C=\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{b-a}{ab}\right)} \Rightarrow C=4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

مانند قبل، ظرفیت تابع مساحت و عکس فاصله و ضریب گذردهی عایق است.

ج) خازن استوانه‌ای: دو پوسته استوانه‌ای رسانای هم محور به شعاع‌های b, a ($b>a$) و طول L با عایق خلاء.



$$C=\frac{q}{V}=\frac{q}{-\int_b^a E\,dr}=\frac{q}{-\int_b^a \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rL}dr}=\frac{-2\pi\epsilon_0 L}{(\ln r)_b^a}$$

$$C=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{(\ln r)_a^b}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

باز هم مانند قبل، ظرفیت تابع مساحت، عکس فاصله و ضریب گذردهی عایق است.

اثر دی الکتریک (عایق) بر ظرفیت: چنانچه تمام فضای میان صفحات یک خازن، بجای خلاء با عایق دیگری پر شود، ابعاد و شکل تغییر نکرده و فقط کافیت بجای ضریب گذردهی خلاء (ϵ_0)، ضریب گذردهی عایق جدید (ϵ) قرار گیرد. بین ϵ و ϵ_0 رابطه‌ای به صورت $\epsilon=k\epsilon_0$ ($k>1$) برقرار است که در آن k ضریب یا ثابت دی الکتریک است. مثلاً برای خازن سطح:

$$C_d=\frac{\epsilon A}{d}=k\frac{\epsilon_0 A}{d}=kC_0 \quad \text{(ظرفیت با دی الکتریک)} \qquad \text{(ظرفیت با عایق خلاء)}$$

از آنجایی که $k>1$، نتیجه می‌گیریم با قرار دادن عایقی با ضریب k میان صفحات خازن، ظرفیت افزایش می‌یابد (k برابر می‌شود)

مثال ۱- می‌خواهیم یک خازن سطح با عایق خلاء به ظرفیت $1F$ بسازیم. اگر صفحات مربع شکل و فاصله بین صفحات $0.2mm$ باشد. طول هر ضلع چقدر باید باشد؟

$$C=\frac{\epsilon_0 A}{d}\rightarrow A=\frac{Cd}{\epsilon_0}=\frac{(1)(0.2\times10^{-3})}{8.85\times10^{-12}}=2.26\times10^{6}\ m^2$$

$$A=a^2\rightarrow a=\sqrt{A}=\sqrt{2.26\times10^{6}}=1.5\times10^{3}\ m$$

یعنی طول هر ضلع صفحه باید 1.5 کیلومتر باشد!!!

بنابراین داشتن ظرفیت $1F$ در عمل بسیار مشکل است.

انرژی ذخیره شده در خازن (U) : هر خازن بواسطه اینکه بار الکتریکی را ذخیره می‌کند، دارای انرژی پتانسیل الکتریکی است و چون این انرژی قابل برگشت و برداشت است، به آن انرژی ذخیره شده هم گفته می‌شود. تعریف می‌کنیم:

انرژی پتانسیل U ، مقدار کاری که انجام می‌شود تا یک خازن بدون بار (خالی) دارای بار شود.

$dW = V\,dq$ ← کار لازم برای قرار گرفتن dq تحت ولتاژ V

$$W = U = \int_{q=0}^{q=q} V\,dq$$

چون با قرار گرفتن بار، ولتاژ V تغییر می‌کند داریم $V = \frac{q}{C}$ پس:

$$U = \int_{q=0}^{q=q} \frac{q}{C}\,dq \xrightarrow{C=\text{ثابت}} U = \frac{1}{C}\int_0^q q\,dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

مثال ۲- الف) انرژی ذخیره شده در یک خازن کروی به شعاع‌های R و 3R با عایق خلاء و بار q چقدر است؟ ب) چه کسری از انرژی کل در فضای بین R و 2R است؟

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \xrightarrow[b=3R]{a=R}$$

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{3R^2}{2R}\right) = 6\pi\epsilon_0 R$$

الف)

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 R}$$

ب) خازن فرضی بین R و 2R دارای ظرفیت C_1 است:

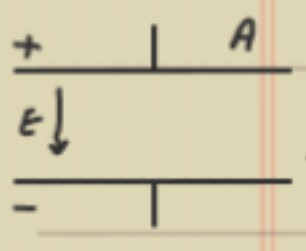
$a=R,\ b=2R$

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{2R^2}{R}\right) = 8\pi\epsilon_0 R \quad , \quad U_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R}}{\frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 R}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \%75 \rightarrow U_1 = \%75\,U$$

یعنی ۷۵٪ انرژی بین R تا 2R و ۲۵٪ انرژی بین 2R تا 3R پخش شده.

انرژی پتانسیل الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی E است. به عبارت دیگر، اگر در فضا میدان الکتریکی وجود داشته باشد، حتماً انرژی الکتریکی وجود دارد. برای نشان دادن این موضوع از خازن صفحه (برای سادگی) استفاده می‌کنیم.



تعریف می‌کنیم: چگالی انرژی u : تغییرات انرژی نسبت به حجم

$$u = \frac{dU}{dV}$$

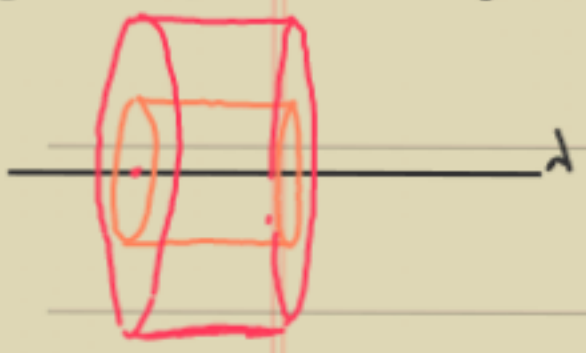
برای توزیع یکنواخت انرژی می‌توان گفت که چگالی انرژی ثابت است:

$$u = \frac{U}{V}$$

برای خازن تخت: $u = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{\epsilon_0 A}{d})V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0(\frac{V}{d})^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

بنابراین در فضا، هرجا میدان وجود دارد چگالی انرژی $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ وجود دارد و می‌توان در هر حجم دلخواه، انرژی U را حساب کرد. اگر میدان ثابت باشد، u ثابت است (توزیع یکنواخت) و در غیر اینصورت u متغیر است و $U = \int_{\text{روی حجم مورد نظر}} u\,dV$.

مثال ۳. خط بار مستقیم و نامتناهی با چگالی λ را در نظر گرفته، انرژی الکتریکی در ناحیه استوانه‌ای به طول L و شعاع‌های R و $2R$ هم محور با خط بار، چقدر است؟



میدان خط بار نامتناهی با قانون گاوس: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ←

$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0(\frac{\lambda^2}{4\pi^2\epsilon_0^2 r^2}) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}$

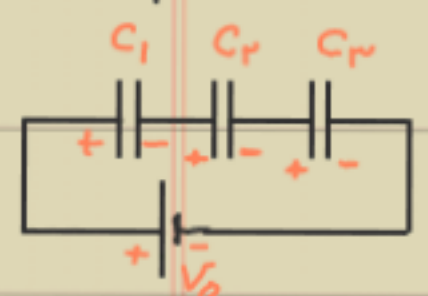
u تابع $\frac{1}{r^2}$ است.

$$U = \int_R^{2R} u\,dV = \int \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}(2\pi r L\,dr) = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0}\ln(2)$$

ترکیب (بهم بستن) خازن‌ها: برای تغییر ظرفیت و همچنین قدرت تحمل مداری شامل خازن، باید آن‌ها را باهم ترکیب کرد.

برای این منظور ممکن است خازن‌ها به طور سری یا به طور موازی ترکیب شوند.

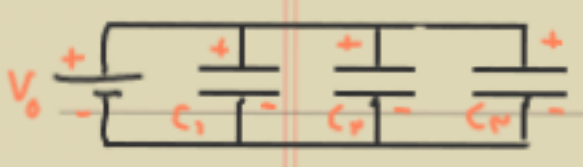
ترکیب سری: اگر قطب‌های ناهمنام خازن‌ها متوالی (پشت سرهم) به هم وصل باشند و بار همه خازن‌ها باهم برابر باشد،



ترکیب را سری می‌گوییم. $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$ عدم وابستگی ولتاژ به مسیر

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

در اینحالت ظرفیت معادل (C_{eq}) کوچک می‌شود.

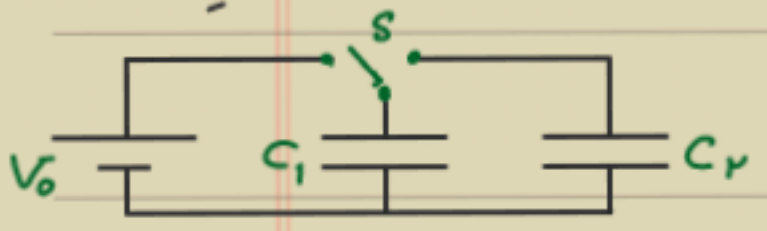
ترکیب موازی: اگر قطب‌های همنام خازن‌ها بهم وصل باشند و ولتاژ خازن‌ها باهم برابر باشد، ترکیب موازی است.

اصل پایستگی بار $q = q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow C_{eq}V_0 = C_1V_0 + C_2V_0 + C_3V_0$

در ترکیب موازی، ظرفیت معادل افزایش می‌یابد. $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

دقت کنید که از روابط مربوط به ترکیب سری یا موازی موقعی استفاده کنید که شرایط سری یا موازی برقرار است و در صورتی که شرایط برقرار نباشد، از اصول حاکم (۱- اصل پایستگی بار ۲- عدم وابستگی ولتاژ به مسیر) استفاده شود.

مثال ۴. در مدار زیر، ابتدا کلید به سمت چپ وصل می‌شود (C_1 وصل و C_2 قطع) پس از پر شدن C_1، کلید به راست متصل می‌شود (باتری قطع و C_1 به C_2 وصل می‌شود). بار هر خازن و انرژی ذخیره شده در ترکیب را در دو حالت حساب کنید.

$(V_0 = 100\,V \;,\; C_1 = 20\,\mu F \;,\; C_2 = 10\,\mu F)$



کلید سمت چپ (C_1 وصل) $\rightarrow$
$$q_0 = C_1 V_0 = 20\,(100) = 2000\ \mu C$$
$$U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = \frac{1}{2}(20)(100)^2 = 10^5\ \mu J$$

پایستگی بار $\rightarrow$ با قطع شدن باتری عامل تغییر بار نداریم $\rightarrow$ کلید سمت راست (باتری قطع)

وقتی C_1 به C_2 وصل شود، شرایط برای ترکیب موازی وجود دارد پس ولتاژ C_1 و C_2 برابر (V) خواهد بود.

$$q_0 = q_1 + q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V = C_{eq} V \rightarrow V = \frac{q_0}{C_{eq}} = \frac{2000}{30}$$

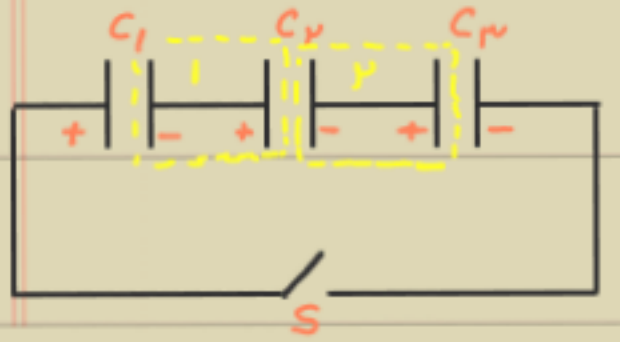
ولت. $V = 66{,}7\,V$ ؛ $q_1 = C_1 V = 20\left(\frac{2000}{30}\right) = 20\,(66{,}7) = 1334\ \mu C$

$$q_2 = C_2 V = q_0 - q_1 = 2000 - 1334 = 666\ \mu C$$

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}(30)\left(\frac{2000}{30}\right)^2 = 66733{,}75\ \mu J$$

مشاهده می‌شود که انرژی ذخیره شده در دستگاه کاهش پیدا کرده است.

مثال ۵. سه خازن $C_1 = 20\,\mu F$ ، $C_2 = 10\,\mu F$ ، $C_3 = 5\,\mu F$ را با مقادیر $q_1 = 200\,\mu C$ ، $q_2 = 300\,\mu C$ و $q_3 = 400\,\mu C$ باردار کرده و سپس قطب‌های ناهمنام آن‌ها را به یکدیگر وصل کرده‌ایم (شکل). بین دو انتهای آزاد ترکیب، کلید S قرار دارد که ابتدا باز است. اگر کلید بسته شود، بار جدید هر خازن و نحوه ترکیب آن‌ها را مشخص کنید.



دقت کنید که با توجه به شرایط بیان شده، این ترکیب سری نیست.

از اصول پایستگی بار و عدم وابستگی ولتاژ به مسیر استفاده کنیم. اگر فرض کنیم پس از بسته شدن کلید بار خازن ها q'_1 و q'_2 و q'_3 باهمان تصاویت اولیه باشد.

	بعد از بستن کلید	قبل از بستن کلید	
پایستگی بار ①	$q'_2 - q'_1$	$q_2 - q_1$	$\rightarrow 300 - 200 = q'_2 - q'_1$
②	$q'_3 - q'_2$	$q_3 - q_2$	$\rightarrow 400 - 300 = q'_3 - q'_2$

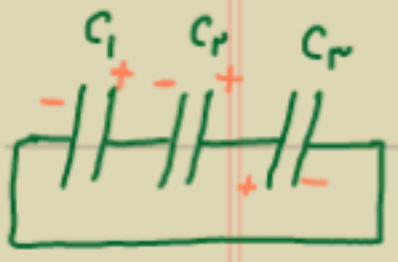
عدم وابستگی ولتاژ به مسیر (بعد از بستن کلید $V=0$) $\rightarrow V'_1 + V'_2 + V'_3 = 0 \rightarrow \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} + \frac{q'_3}{C_3} = 0$

با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، q'_1 و q'_2 و q'_3 بدست می آیند.

$$\begin{cases} 100 = q'_2 - q'_1 \rightarrow q'_1 = q'_2 - 100 \\ 100 = q'_3 - q'_2 \rightarrow q'_3 = q'_2 + 100 \\ \frac{q'_1}{20} + \frac{q'_2}{10} + \frac{q'_3}{5} = 0 \rightarrow \frac{q'_1 + 2q'_2 + 4q'_3}{20} = 0 \rightarrow (q'_2 - 100) + 2q'_2 + 4(q'_2 + 100) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 7q'_2 + 300 = 0 \rightarrow q'_2 = \frac{-300}{7} = -42{,}86 \ \mu C$$

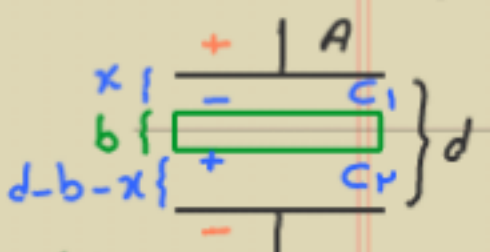
$$q'_1 = -42{,}86 - 100 = -142{,}86 \ \mu C \qquad q'_3 = -42{,}86 + 100 = 57{,}14 \ \mu C$$



علامت منفی نشان می دهد که پس از بستن کلید، قطبیت خازن های ① و ② عوض می شود.

بنابراین ترکیب فوق نه سری است و نه موازی.

مثال ۶. ورقه رسانائی به ضخامت b بین صفحات خازن سطحی به مساحت A و فاصله صفحات d باهمان خلا قرار می گیرد. ($b < d$). ظرفیت جدید خازن چقدر است؟ ظرفیت بدون ورقه $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$



به دلیل رسانا بودن ورقه، میدان داخل آن صفر است و اثر القاء الکتریکی باعث می شود روی دو طرف آن بار القائی شود و شکل تبدیل به دو خازن سری می شود.

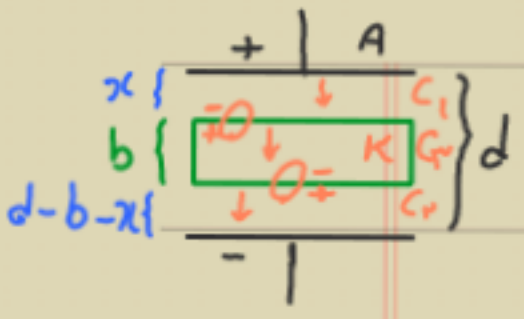
$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{x} \ , \ C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d-b-x}$$

C_1, C_2 سری $\rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\epsilon_0 A} + \frac{d-b-x}{\epsilon_0 A} = \frac{d-b}{\epsilon_0 A} \rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{d-b}$

در واقع، وجود رسانا باعث کاهش فاصله میان دو صفحه شده است و ظرفیت افزایش یافته.

مثال ۷. در مثال قبل فرض کنید ورقه نارسانا به ضریب k باشد، در این صورت ظرفیت جدید چقدر خواهد شد.

چون بره عایق است، اثر القا در آن نیست و وجود میدان باعث ایجاد بارهای قطبی می‌شود



در این حالت روی سطوح بره وجود دو قطبی‌ها باعث ایجاد لایه‌ای میکروسکوپی از بارهای + و - می‌شود. مانند مثال قبل دو طرف بره، خازن‌های C_1 و C_2 ایجاد می‌شود و بره نیز به صورت یک خازن با عایق به ضریب k خواهد بود.

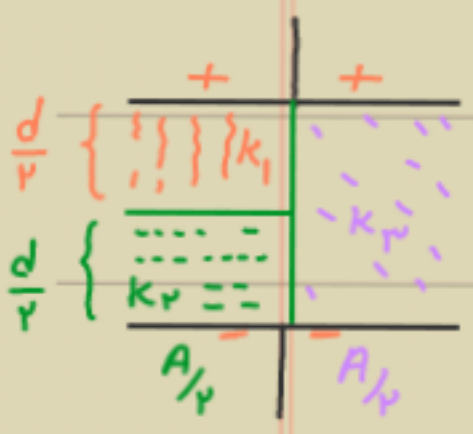
$$C_1=\frac{\epsilon_0 A}{x}\ ,\quad C_2=\frac{\epsilon_0 A}{d-b-x}\ ,\quad C_3=\frac{k\epsilon_0 A}{b}$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\rightarrow\frac{1}{C_{eq}}=\frac{x}{\epsilon_0 A}+\frac{d-b-x}{\epsilon_0 A}+\frac{b}{k\epsilon_0 A}=\frac{kd-kb+b}{k\epsilon_0 A}\rightarrow C_{eq}=\frac{k\epsilon_0 A}{kd-b(k-1)}$$

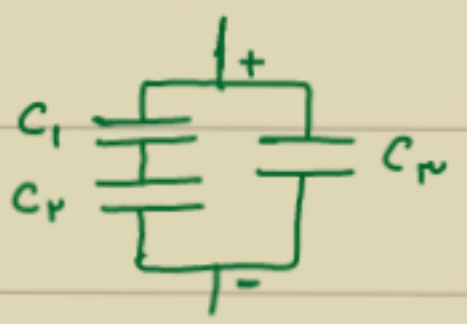
در حالت‌های خاص: اگر بره همهٔ فضای میان صفحات را پر کند ($b=d$) در این صورت $C_{eq}=\frac{k\epsilon_0 A}{d}$

اگر بره، خلاء باشد $k=1$ و $C_{eq}=\frac{\epsilon_0 A}{d}$

مثال ۸. مطابق شکل، فضای میان صفحات یک خازن مسطح با $\frac{2}{3}$ دی الکتریک پر شده. ظرفیت شکل را بدست آورید.



شکل، ترکیب سه خازن C_1 و C_2 و C_3 است که می‌توان به صورت زیر نشان داد.



در این حالت C_1 و C_2 سری و ترکیب آنها با C_3 موازی است.

$$C_1=\frac{k_1\epsilon_0 A/2}{d/2}=\frac{k_1\epsilon_0 A}{d}$$

$$C_2=\frac{k_2\epsilon_0 A/2}{d/2}=\frac{k_2\epsilon_0 A}{d}$$

$$\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}\rightarrow\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d}{k_1\epsilon_0 A}+\frac{d}{k_2\epsilon_0 A}=\frac{d(k_1+k_2)}{k_1k_2\epsilon_0 A}$$

$$C_3=\frac{k_3\epsilon_0 A/2}{d}=\frac{k_3\epsilon_0 A}{2d}$$

$$\rightarrow C=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)$$

C با C_3 موازی است $\rightarrow C_{eq}=C+C_3=\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)\frac{\epsilon_0 A}{d}+\frac{k_3\epsilon_0 A}{2d}$

$$C_{eq}=\frac{\epsilon_0 A}{d}\left\{\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}+\frac{k_3}{2}\right\}$$